Számolás

Ha mást nem mondunk, szám alatt az alábbiakban, mindig valós számot értünk.

Műveletek

összeadás:

Példa: p+x+5

tagok: amiket összeadunk, az előző példában a p, az x és az 5

szorzás:

Példa: $p\cdot x\cdot 5$

tényezők: amiket összeszorzunk, az előző példában a p, az x és az 5

hatványozás, gyökvonás:

Példa: x^n

alap: x

kitevő: n

pozitív egész kitevő esete: $x^n = x\cdot x\cdot\ldots\cdot x$ (n db szorzótényező)

negatív egész kitevő esete: $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, ha $x\neq 0$

Példa: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

nulla kitevő esete: $x^0 = 1$, ha $x\neq 0$

gyökvonás: ha x egy pozitív szám, n pedig egy pozitív egész szám és $x^n=y$, akkor azt mondjuk, hogy x az y n-edik gyöke; jelölése: $x = \sqrt[n]{y}$ vagy $x = y^{\frac{1}{n}}$.

A gyökvonás fenti értelmezésében csak a pozitív számokra szorítkoztunk, ahol a gyökvonás egyértelműen elvégezhető, az $x^n=y$ egyenlet típusú egyenletekben (y ismert, x ismeretlen) általában nem élhetünk az $x>0$, $y>0$ feltételezéssel, így a megoldásainak száma nem feltétlenül egy. Az alábbiakban áttekintünk néhány esetet:

Páros n esete:

Ha $y<0$, akkor nincs megoldás.

Példa: $x^4 = -3$

Ha $y=0$, akkor egy megoldás van.

Példa: $x^4 = 0$ megoldása: $x=0$

Ha $y>0$, akkor két megoldás van.

Példa: $x^4 = 16$ megoldásai: $x_1=-2$, $x_2=2$

Páratlan n esete:

Egy megoldás van.

Példa: $x^3 = -8$ megoldása: $x=-2$.

tört (racionális) kitevő esete: $x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$, ha q pozitív egész szám és $x>0$

A hatványozás néhány tulajdonsága

Ha $x>0$, $y>0$, n és k racionális számok, akkor

$$x^n\cdot x^k = x^{n+k}$$

$$\frac{x^n}{x^k} = x^{n-k}$$

$$\left(x^n\right)^k = x^{n\cdot k}$$

$$(x\cdot y)^n = x^n\cdot y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}.$$

Mivel a kitevők racionális számok is lehetnek, ezek a képletek egyben a gyökvonás tulajdonságait is megadják.

Tizedes törtek

Példa: 384,5472

egész rész: 384

tört rész: 0,5472

A tizedes törteket a törtrészük felírása alapján három csoportba lehet sorolni:

véges tizedes tört: törtrésze véges sok számjeggyel felírható (a racionális számok egy része véges tizedes tört formában felírható).

Példa: 384,5472

végtelen szakaszos tizedes tört: törtrésze nem írható fel véges sok számjeggyel, de véges sok számjegy után egy számjegy csoport ismétlődése tapasztalható (azok a racionális számok, melyek nem írhatók fel véges tizedes tört formában, azok végtelen szakaszos tizedes tört formájúak). Az ismétlődő csoportot a számjegyei fölé tett pontokkal szoktuk jelölni.

Példa: $\frac{450}{88} = 5{,}1136363636\ldots = 5{,}11\dot{3}\dot{6}$

végtelen nem szakaszos tizedes tört: azok a számok, melyek nem tartoznak az előző két kategória egyikébe sem.

Példa: $\frac{450}{88} = 5{,}1136363636\ldots = 5{,}11\dot{3}\dot{6}$

normál alak: $\mathbf{p\cdot 10^k}$ alakú szorzat, melyben $1\leq p<10$, k pedig egy egész szám.

mantissza: p

karakterisztika: k

(A k értéke adja a szám nagyságrendjét. Így pl. az, hogy egy y szám 3 nagyságrenddel nagyobb az x számnál azt jelenti, hogy y kb. 1000-szer akkora, mint az x.)

Példa: $3{,}845472\cdot 10^2$

normál alakú számok összeadása: az összeadás előtt a számokat vagy vissza kell írni egyszerű tizedes tört alakba, vagy úgy kell felírni, hogy a 10 hatványok kitevője azonos legyen:

Példa: A $4{,}52\cdot 10^5+9{,}1\cdot 10^6$ összeadás két lehetséges elvégzési módja:

1, $4{,}52\cdot 10^5+9{,}1\cdot 10^6=452000+9100000=9552000=9{,}552\cdot 10^6$

2, $4{,}52\cdot 10^5+9{,}1\cdot 10^6=4{,}52\cdot 10^5+91\cdot 10^5=95{,}52\cdot 10^5=9{,}552\cdot 10^6$

normál alakú számok szorzása: a $p\cdot 10^k$ alakú és a $q\cdot 10^s$ normál alakú számok szorzata: $\mathbf{(p\cdot 10^k)\cdot(q\cdot 10^s)=p\cdot q\cdot 10^{k+s}}$ vagyis a mantisszákat össze kell szorozni, a karakterisztikákat pedig össze kell adni.

Példa: A $5\cdot 10^5+1{,}4\cdot 10^6 = 7\cdot 10^{11}$

Közönséges törtek

közönséges tört: $\frac{p}{q}$, $q\neq 0$

számláló: p

nevező: q

Egy x tizedes tört lehet $\frac{x}{1}$ alakú közönséges törtként is írni, amennyiben erre szükség van.

két közönséges tört összeszorzása: $\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s} = \frac{p\cdot r}{q\cdot s}$, vagyis a számlálót a számlálóval, a nevezőt a nevezővel kell összeszorozni

közönséges tört szorzása tizedes törttel:, $\frac{p}{q}\cdot r = \frac{p\cdot r}{q}$ vagyis a tizedes törttel (ami speciális lehet egész szám is) a számlálót kell megszorozni. Ezt úgy is el lehet képzelni, hogy az r tizedes törtet $\frac{r}{1}$ alakú közönséges törtnek tekintjük, és alkalmazzuk a két közönséges tört összeszorzására vonatkozó szabályt.

reciprok: a $\frac{p}{q}$ közönséges tört reciproka a $\frac{q}{p}$, ha $p \neq 0$.
Világos, hogy egy törtnek és a reciprokának szorzata 1.
(Reciprok minden nullától különböző x valós számhoz rendelhető: az 1/x formula szerint.)

két közönséges tört osztása: $\frac{p}{q}:\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r}$, ha $r \neq 0$, vagyis törttel osztani úgy kell, hogy a reciprokával kell szorozni.

közönséges tört osztása tizedes törttel: $\frac{p}{q}:r=\frac{p}{q\cdot r}=\frac{p:r}{q}$, vagyis a tizedes törttel (ami speciális lehet egész szám is) a nevezőt kell megszorozni, vagy a számlálót kell elosztani. Ezt úgy is el lehet képzelni, hogy az r tizedes törtet $\frac{r}{1}$ alakú közönséges törtnek tekintjük, és alkalmazzuk a két közönséges tört osztására vonatkozó szabályt.
A számításokban gyakran előfordulnak az alábbi (ún. emeletes törtekre vonatkozó) átalakítások, melyek összhangban vannak a fentiekkel:

$$\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}}=\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{r} \qquad \frac{p}{\frac{r}{s}}=p\cdot\frac{s}{r} \qquad \frac{\frac{p}{q}}{r}=\frac{p}{q\cdot r}$$

Az előbbi formulákból látható, hogy több törtvonal esetén világosan kell érzékeltetni, hogy melyik az ún. fő törtvonal. Ennek az egyenlőség jellel kell egy magasságban lenni.
közönséges tört egyszerűsítése és bővítése:
Könnyen belátható, hogy $\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{s}=\frac{p}{q}$, ha $s \neq 0$. Ez a formula úgy fogalmazható meg, hogy egy közönséges tört értéke nem változik meg, ha a számlálóját és a nevezőjét ugyanazzal a nullától különböző számmal osztjuk (egyszerűsítés), vagy szorozzuk (bővítés).
két közönséges tört összeadása:
azonos nevező esetén
$\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}$, vagyis azonos nevezőjű törtek esetén össze kell adni a számlálókat, a nevező változatlan.
(A fenti formulát „fordítva olvasva" látható, hogy ha a számlálóban több tag van, akkor azokat külön-külön elosztva a nevezővel, az eredeti törtet egyszerűbbekre bonthatjuk.)
különböző nevező esetén
$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot s}+\frac{r\cdot q}{s\cdot q}=\frac{p\cdot s+r\cdot q}{q\cdot s}$, vagyis különböző nevezőjű törteket úgy kell bővíteni, hogy a két nevező egyforma legyen (közös nevezőre hozás), és ez után alkalmazható a fenti számolás. Legegyszerűbb az eredeti nevezők szorzatát alkalmazni közös nevezőként, bár ennél sok esetben lehet kisebb közös nevezőt is találni.

Közepek (átlagok)

Számtani közép
Az $x_1, x_2,\ldots, x_n$ számok számtani közepe (átlaga):

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

Súlyozott számtani közép
Az $x_1, x_2,\ldots, x_n$ számoknak a $p_1, p_2,\ldots, p_n$ pozitív számokkal (súlyokkal) képzett súlyozott számtani közepe (átlaga):

$$\frac{p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+\ldots+p_n\cdot x_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n}p_i}$$

Ha a $p_1, p_2,\ldots, p_n$ (pozitív) súlyok összege 1, akkor a fenti formula leegyszerűsödik:

$$p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+\ldots+p_n\cdot x_n=\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot x_i$$

Mértani közép
Az $x_1, x_2,\ldots, x_n$ nem negatív számok mértani közepe:

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}$$

Harmonikus közép
Az $x_1, x_2,\ldots, x_n$ pozitív számok harmonikus közepe:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$$

Négyzetes

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_1^2+\ldots+x_1^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}}$$

Könnyen belátható, hogy az $x_1, x_2,\ldots, x_n$ számok bármelyik közepe a legkisebb és a legnagyobb érték közé esik. Ha speciálisan az összes szám egyenlő, akkor mindegyik közepük egyenlő ezzel az értékkel.
Ha $x_1, x_2,\ldots, x_n$ pozitív számok harmonikus, mértani és számtani és négyzetes közepét H, M, S és N jelöli, akkor fennáll, hogy

$$H \leqslant M \leqslant S \leqslant N$$

Százalékszámítás

$$\text{százalék alap}\cdot\frac{\text{százaléköláb}}{100}=\text{százalékérték}$$

Példa: 12-nek a 30%-a 3,6, mert $12\cdot\frac{30}{100}=3{,}6$

A fenti képlet alapján a százalék alap, százalékláb és a százalékérték közül bármelyik kettőből a harmadik kiszámítható.
A százalékszámítás egyik gyakori alkalmazása a kamatszámítás. Ha az egy éves kamat p%, akkor a bankban elhelyezett T összegre (tőkére) egy év elteltével kapott kamat $T\cdot\frac{p}{100}$, a kamattal megnövekedett összegünk pedig

$$T+T\cdot\frac{p}{100}=\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot T.$$

Ha a kamat évenkét tőkésedik, akkor n év elteltével a rendelkezésünkre álló összeg:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot T.$$

Példa: 250000 Ft tőke 7% éves kamat és évenkénti tőkésedés mellett 6 év elteltével

$$\left(1+\frac{7}{100}\right)^6\cdot 250000=1{,}07^6\cdot 250000=375182{,}6$$

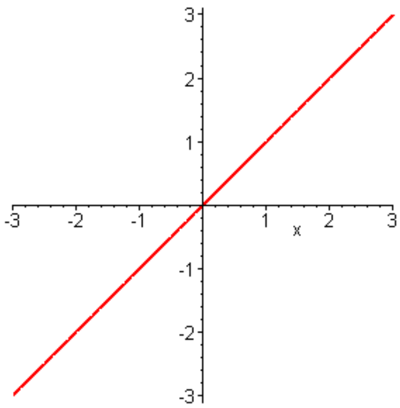
forintot ér.

Több tagú összeg hatványozása, néhány azonosság
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$
$a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

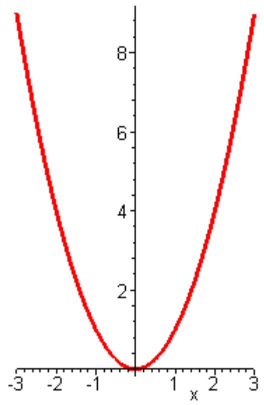
Függvények

A későbbiekben tárgyalásra kerülő témakörökhöz (kezdve az egyenletekkel és az egyenlőtlenségekkel) elengedhetetlen a legfontosabb függvények hozzárendelési szabályának, és a grafikonjának ismerete. Az alábbi képek néhány alapvető függvény grafikonját mutatja

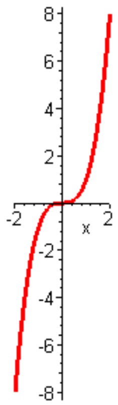
$x \to x$



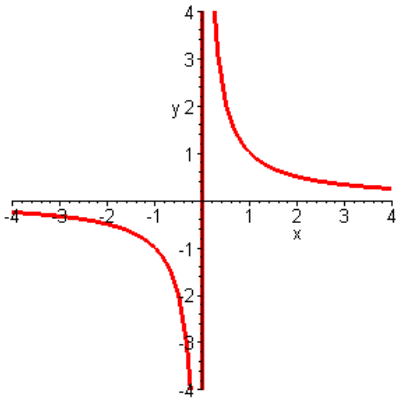
$x \to x^2$



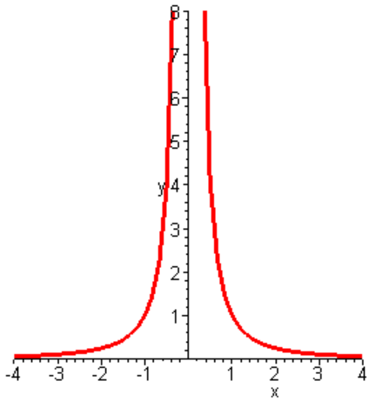
$x \to x^3$



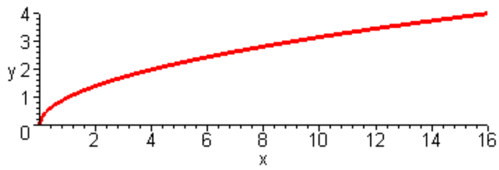
$x \to x^{-1}$



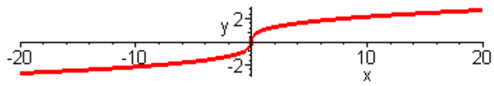
$x \to x^{-2}$



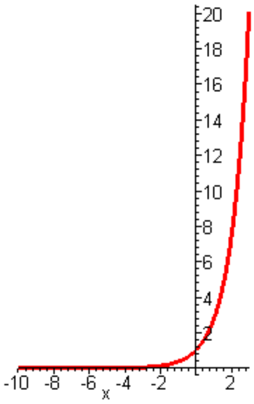
$x \to \sqrt{x}$



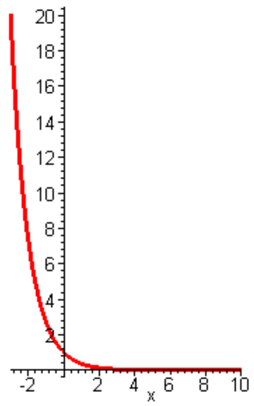
$x \to \sqrt[3]{x}$



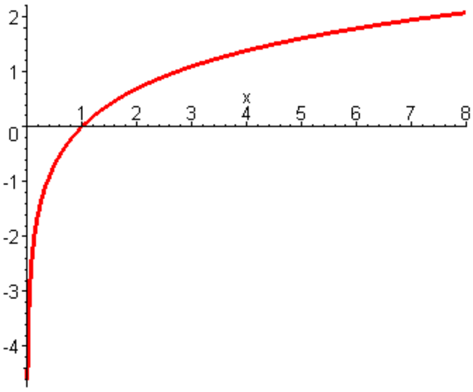
$x \to 2^x$



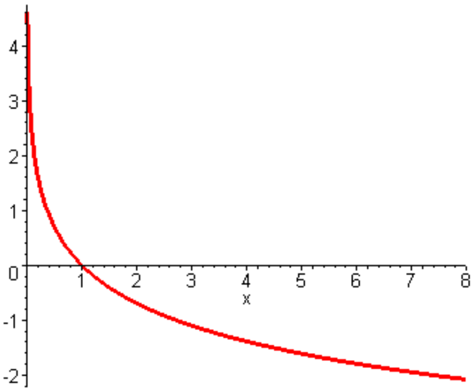
$x \to \left(\frac{1}{2}\right)^x$



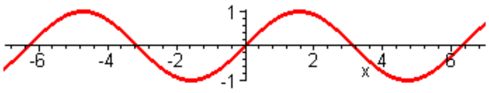
$x \to \log_2 x$



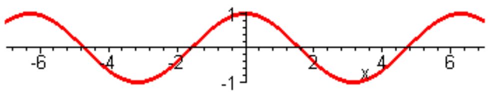
$x \to \log_{0,5} x$



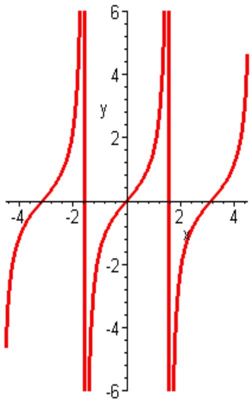
$x \to \sin x$



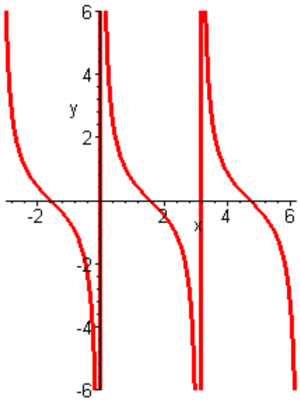
$x \to \cos x$



$x \to \text{tg } x$

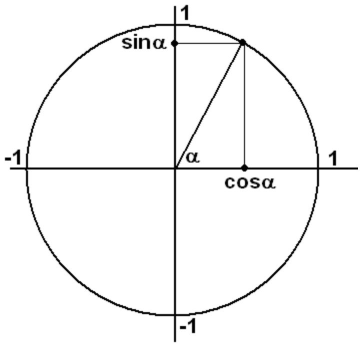


$x \to \text{ctg } x$

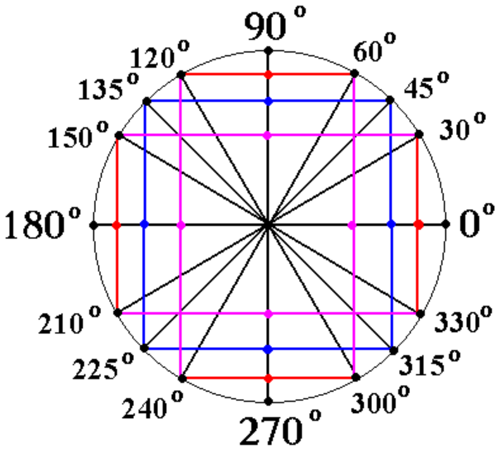


Nevezetes szögek szinusza és koszinusza

Egy egységnyi hosszúságú vektort (pozitív forgásirányban) megforgatva a végpont koordinátái a forgatás szögének koszinuszát és szinuszát adják



Nevezetes szögeknek a rajzon megjelölt szögeket nevezzük.



A nevezetes szögek koszinuszai és szinuszai a

$$0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \pm1$$

értékek valamelyikével egyenlők. A felsorolt értékek nagyságrendi sorrendben vannak, így könnyen azonosíthatók a rajzon a tengelyeken megjelölt értékekkel.
A rajzról bármelyik nevezetes szög koszinusza és szinusza leolvasható. Az értékeket a következő táblázat is tartalmazza:

szög (fok)	szög (rad)	sin	cos
0°	0	0	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
180°	π	0	-1
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
360°	2π	0	1

Összefüggés a trigonometrikus függvények között

	sin	cos	tg	ctg
sin x=	-	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\mathrm{tg}x}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}}$
cos x=	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	-	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$	$\frac{\mathrm{tg}x}{\pm\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2 x}}$
tg x=	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	-	$\frac{1}{\mathrm{ctg}x}$
ctg x=	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\mathrm{tg}x}$	-

A táblázat használata: ha a cos függvénynek a tg függvénnyel való kifejezésére van szükség, akkor a cos x sorban és a tg oszlopban lévő formulát kell tekinteni:

$$\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$$

A ± jel arra utal, hogy az összefüggés az x értékétől függően két formulával adható meg.

Szögek összege, különbsége, kétszerese és fele trigonometrikus függvényeinek kifejezése az eredeti szögek trigonometrikus függvényeivel

	x+y	x-y	2x	x/2
sin	sinx·cosy + cosx·siny	sinx·cosy – cosx·siny	2·sinx·cosx	$\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
cos	cosx·cosy – sinx·siny	cosx·cosy + sinx·siny	$\cos^2 x - \sin^2 x$	$\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
tg	$\frac{tgx + tgy}{1 - tgx \cdot tgy}$	$\frac{tgx - tgy}{1 + tgx \cdot tgy}$	$\frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$	$\frac{1-\cos x}{\sin x}$
ctg	$\frac{ctgx \cdot ctgy - 1}{ctgx + ctgy}$	$\frac{ctgx \cdot ctgy + 1}{ctgy - ctgx}$	$\frac{ctg^2 x - 1}{2ctgx}$	$\frac{1+\cos x}{\sin x}$

A táblázat használata: ha a cos(x-y) kifejezésére van szükség az x és az y trigonometrikus függvényeivel, akkor a cos sorban és az x-y oszlopban lévő formulát kell tekinteni: cos(x-y) = cosx·cosy + sinx·siny.

További összefüggések

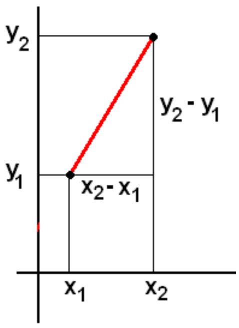
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

Koordinátageometria a síkban

Pontok távolsága

Az $P_1=(x_1,y_1)$ és a $P_2=(x_2,y_2)$ pontok távolsága

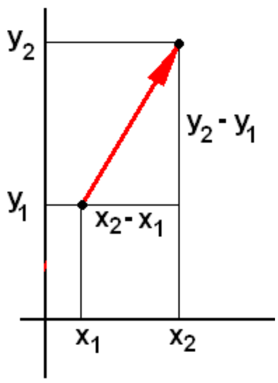
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Két pont által meghatározott vektor

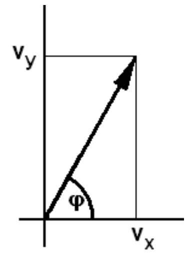
Az $P_1=(x_1,y_1)$ és a $P_2=(x_2,y_2)$ pontok által meghatározott vektor:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



Vektor hossza

A (v_x,v_y) vektor hossza: $d(P_1, P_2) = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$

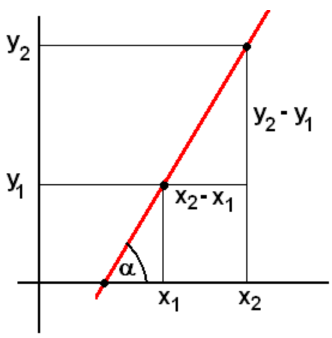


Vektor szöge

A (v_x,v_y) vektor szöge: az x tengely pozitív felétől pozitív forgásirányban mért szög. $tg\varphi = \frac{v_y}{v_x}$, amennyiben $v_x \neq 0$.

Egyenes meredeksége (iránytangense)

Egy (az y tengellyel nem párhuzamos) egyenesen felvéve két pontot: (x_1,y_1) és (x_2,y_2) az $m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ értéket az egyenes meredekségének, vagy iránytangensének nevezzük.



Egyenes egyenlete

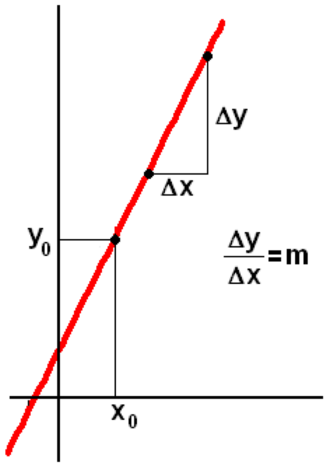
Itt egyenes egyenletén az

$$\boxed{y = m\cdot(x-x_0) + y_0}$$

formulát értjük. Az m, az x_0 és az y_0 paramétereknek közvetlen geometriai jelentése van:

m: meredekség (iránytangens)

(x_0,y_0): az egyenes egy pontja



Meg kell jegyezni, hogy az y tengellyel párhuzamos egyeneseknek ilyen egyenlete nincs. Az ilyen egyenesek egyenlete x=c alakú, ahol c az x tengellyel alkotott metszéspont.

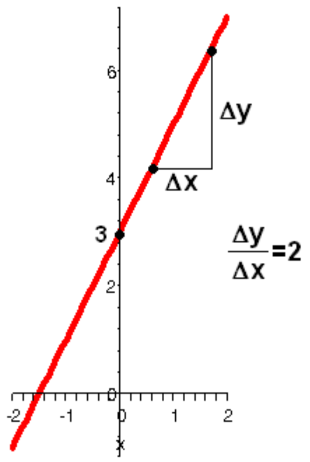
Az $y = m\cdot(x-x_0) + y_0$ formula átrendezésével kapott egyenletek ugyanazt az egyenest határozzák meg. Egy egyenes „különböző” egyenletei valójában tehát csak átrendezésben térnek el egymástól. Az egyes átrendezésekben szereplő paraméterek más-más geometriai tartalommal bírnak.

A lehetséges átrendezések közül igen gyakran használjuk az $\mathbf{y = m\cdot x + b}$ formulát. Itt az m és a b paraméterek jelentése:

m: meredekség (iránytangens)

b: metszéspont az y tengellyel

Példa: $\mathbf{y=2\cdot x+3}$

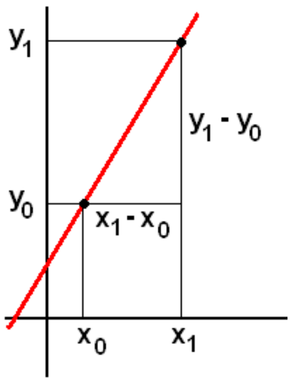


Egyenes egyenletének felírása különböző adatokból

Az alábbi esetek mindegyikében az egyik adat az egyenes egy pontja, ami megfelel az egyenes egyenletében szereplő (x_0,y_0) pontnak, a másik adat pedig a következők valamelyike: egy másik pont, egy irányvektor, egy normálvektor. Mindegyik esetben kifejezhető a meglévő adatokból a meredekség, és felírható az egyenlet.

1. Két pont

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, melynek két pontja: (x_0,y_0) és (x_1,y_1)! (Feltételezzük, hogy $x_0 \neq x_1$)

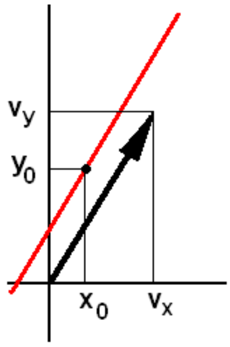


$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, így az egyenes egyenlete:

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + y_0$$

2. Egy pont és egy irányvektor

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, melynek egy pontja: (x_0,y_0), egy irányvektora (v_x,v_y)! (Feltételezzük, hogy $v_x \neq 0$)

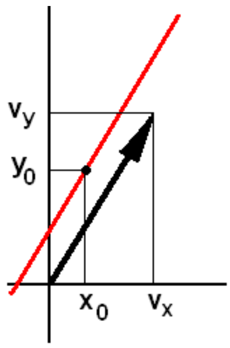


$m = \frac{v_y}{v_x}$, így az egyenes egyenlete: $y = \frac{v_y}{v_x} \cdot (x - x_0) + y_0$

Szokásos a $\mathbf{v_y\cdot(x-x_0) = v_x\cdot(y-y_0)}$ alakra való átírás.

3. Egy pont és egy normálvektor

Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, melynek egy pontja: (x_0,y_0), egy normálvektora (A,B)! (Feltételezzük, hogy $B \neq 0$)



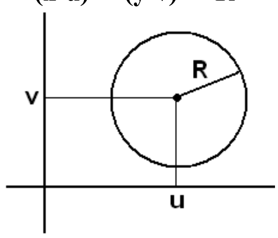
$m = -\frac{A}{B}$, így az egyenes egyenlete: $y = -\frac{A}{B} \cdot (x - x_0) + y_0$

Szokásos az $\mathbf{A\cdot(x-x_0) + B\cdot(y-y_0) = 0}$ alakra való átírás.

Kör egyenlete

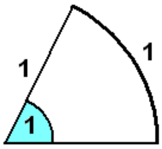
Az (u,v) középpontú, R sugarú kör egyenlete:

$$\mathbf{(x-u)^2 + (y-v)^2 = R^2}$$



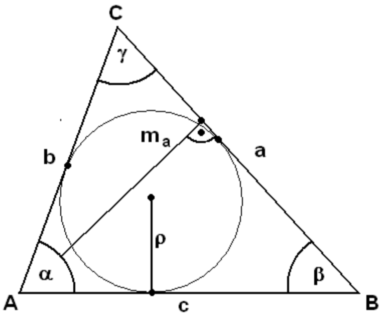
A háromszög geometriája

Szög mérése
Fok: a teljes szög mértéke 360°
Radián: egységnyi sugarú kör esetén 1 radián az a (középponti) szög, melyhez egységnyi ívhossz tartozik



Összefüggés fok és radián között : **180° =** π (rad)

Általános háromszögek



m_a: az a oldalhoz tartozó magasság
ρ: a beírt kör sugara
Szögek: $\alpha+\beta+\gamma = 180°$
Kerület:

$$K=a+b+c$$

Terület:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}$$

(A képlet bármely oldallal és a hozzá tartozó magassággal érvényes.)

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$

(A képlet bármely két oldallal és a közrefogott szöggel érvényes.)

$$T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

ahol s=K/2

$$T = \frac{K \cdot \rho}{2}$$

Szinusz tétel

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

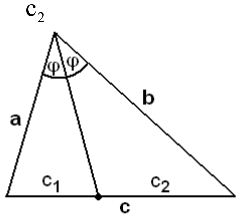
(A képlet bármely két oldallal és a szemközti két szöggel érvényes.)

Koszinusz tétel

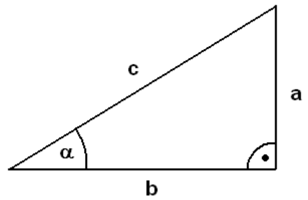
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

(A képlet bármelyik szöggel érvényes, amennyiben a baloldalon a szöggel szemközti oldal négyzete szerepel.)

Szögfelező tétel: $\frac{a}{b} = \frac{c_1}{c_2}$



Derékszögű háromszögek
(A derékszögű háromszögekre természetesen érvényesek az általános háromszögekre kimondott állítások, az alábbiakban csak a további speciális tulajdonságokat soroljuk fel.)



a, b: befogók
c: átfogó
Terület: $T = \frac{a \cdot b}{2}$
Pitagorasz tétel (a koszinusz tétel speciális esete derékszögű háromszögre):

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Az oldalak aránya

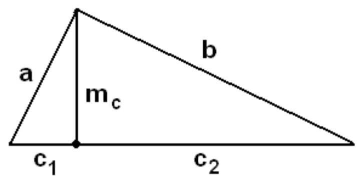
$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \qquad \frac{b}{c} = \cos\alpha \qquad \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha$$

Ezek az összefüggések azt fejezik ki, hogy ha a derékszögön kívül még egy másik szög (α) adott a derékszögű háromszögben, akkor az oldalak aránya meghatározott. A fenti jelölésekkel, pl. az a és a b oldal arányát a tgα értéke adja.
(Meg kell jegyezni, hogy a fenti formuláknak a szögfüggvények definiálására való alkalmazása csak a $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$ tartományban lenne értelme.)
Gyakran van arra szükség (pl. a mechanikában az erőkkel való számoláskor), hogy az átfogóból számítsuk ki az oldalakat. Ez a fentiek szerint a

$$a = c \cdot \sin\alpha, \quad b = c \cdot \cos\alpha$$

összefüggések alkalmazását jelenti.

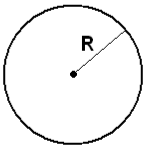
Magasság tétel, befogó tétel



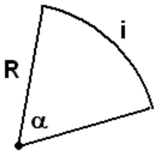
$$m_c = \sqrt{c_1 c_2}, \quad a = \sqrt{c c_1}, \quad b = \sqrt{c c_2}$$

A kör geometriája

$\pi \approx$ **3,1415926**



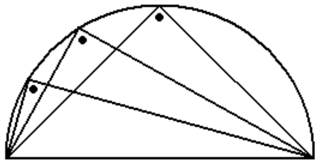
Kerület: $2 \cdot R \cdot \pi$
Terület: $R^2 \cdot \pi$
Körcikk



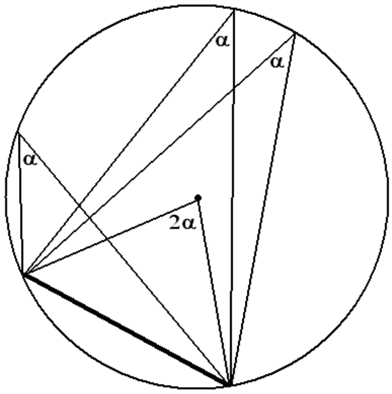
Ívhossz: $i = R \cdot \alpha$

Terület: $T = \dfrac{R^2 \cdot \alpha}{2}$

Thalész tétel



Középponti és kerületi szögek

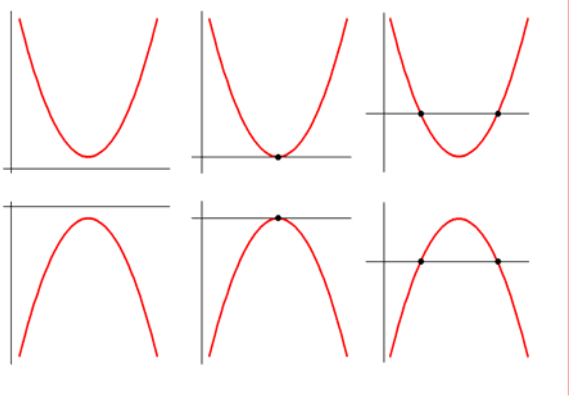


Másodfokú polinomok, egyenletek és egyenlőtlenségek

Másodfokú polinom

$$\mathbf{P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$$

ahol $a \neq 0$. Másodfokú polinom grafikonja parabola, mely $a>0$ esetben „felfelé nyílt”, $a<0$ esetben „lefelé nyílt”. A grafikonnak az x tengellyel 0, 1 vagy 2 közös pontja van, vagyis egy másodfokú polinomnak 0, 1 vagy 2 zérushelye van.



Másodfokú egyenlet

$$\mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$$

Másodfokú egyenlet megoldása nem más, mint a baloldalon lévő másodfokú polinom zérushelyeinek megkeresése. A fentiekből következik, hogy egy másodfokú egyenletnek 0, 1 vagy 2 megoldása van.

Diszkrimináns: $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$

A diszkriminánsnak csak akkor van értéke, ha $b^2 \geq 4ac$.

Megoldóképlet: $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

A megoldóképlet a diszkrimináns értékétől függően 0, 1 vagy 2 értéket ad, ezek éppen az egyenlet megoldásai (gyökei):
Ha $D<0$, akkor nincs megoldás.
Ha $D=0$, akkor egy megoldás van.
Ha $D>0$, akkor két megoldás van.

Példa: $\mathbf{2x^2 + 10x + 12 = 0}$

$D = \sqrt{100 - 4 \cdot 2 \cdot 12} = \sqrt{4} = 2$

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{4}}{4} = -3, \qquad x_2 = \frac{-10 + \sqrt{4}}{4} = -2$$

Gyöktényezős felbontás

Ha egy gyök van: x_0, akkor

$$\mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_0)^2}$$

(ekkor ún. teljes négyzet alakról beszélünk)
Ha két gyök van: x_1 és x_2, akkor

$$\mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

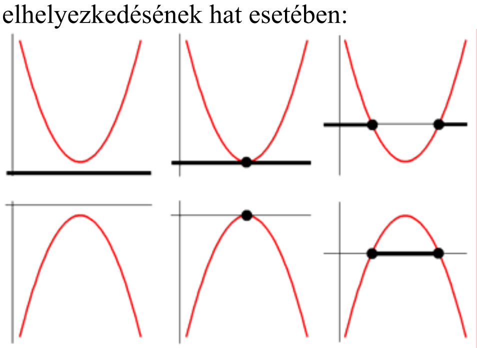
A gyökök és az együtthatók összefüggései

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Másodfokú egyenlőtlenség

$$\mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0, \quad a \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0}$$
$$\mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0, \quad a \cdot x^2 + b \cdot x + c < 0}$$

Egy másodfokú egyenlőtlenség a megfelelő egyenlet megoldása, valamint a baloldalon lévő másodfokú polinom grafikonjáról készítet vázlat alapján könnyen megoldható.
Az $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0$ és az $a \cdot x^2 + b \cdot x + c \leq 0$ egyenlőtlenségek megoldáshalmazát az alábbi ábrák mutatják:
Az $\mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0}$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a grafikon elhelyezkedésének hat esetében:



Az $\mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c \geq 0}$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a grafikon elhelyezkedésének hat esetében: