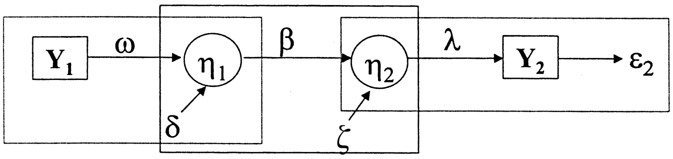
17. fejezet

LVPLS-modell

Latent Variables Path Analysis with PartiaL east-Squares Estimation)

A latens változók út-modelljének szkémája:



ahol Y_1, Y_2: a megfigyelt, manifeszt változók halmaza, η_1, η_2: nem megfigyelt, latens változók halmaza, β: útegyüttható(k), λ: az endogén manifeszt változók faktorsúlya(i), ω: az exogén manifeszt változók regressziós súlya(i), ζ: a latens endogén változó sztochasztikus reziduális tagja(i), δ: az exogén latens változó reziduális tagja(i), ε: az endogén manifeszt változó mérési hibája(i).

A modell három egyenletből áll.

1. Az első a latens változók közötti utakat írja le, ez a modell strukturális egyenlete:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta}, \tag{17.1}$$

ahol $E(\eta) = \mathbf{0}$, $E(\zeta) = \mathbf{0}$, $E(\eta\zeta') = \mathbf{0}$.

Az i-edik latens változót előállító strukturális egyenlet:

$$\eta_i = \sum_{j<i} (\beta_{ij}\eta_j) + \zeta_i. \tag{17.2}$$

Feltételezzük, hogy az endogén latens változó (η_i) az ok szerepét betöltő latens változók feltételes várható értéke:

$$E(\eta_i \mid \eta_j) = \sum_{j<i} (\beta_{ij}\eta_j). \tag{17.3}$$

2. A második egyenlet a manifeszt változók mérési modellje:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{17.4}$$

ahol Λ: általános eleme λ_{kj} a j-edik latens változó (η_j) regressziós együtthatója a k-adik megfigyelt változó (y_k) előállításában, vagy másképpen a k-adik megfigyelt változónak a j-edik latens változóra vonatkozó faktorsúlya,

ϵ: a megfigyelt változók mérési hibáit, a megfigyelt változók reziduális tagjait tartalmazza.

Feltételezzük, hogy

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad E(\eta) = \mathbf{0}, \quad E(\epsilon) = \mathbf{0}, \quad E(\eta\epsilon') = \mathbf{0}.$$

Az utolsó feltétel azt jelenti, hogy a mérési hibák korrelálatlanok a latens változókkal.

Az egyenlet mérési hiba nélküli része feltételezés szerint a megfigyelt változók latens változóra vonatkozó feltételes várható értékét adja. A k-adik megfigyelt változó feltételes várható értéke:

$$E(y_k \mid \boldsymbol{\eta}) = \sum_j (\lambda_{kj}\eta_j). \tag{17.5}$$

3. A harmadik egyenlet a súlymodell. Ebben a latens változókat a megfigyelt változók regressziós függvényeként állítjuk elő. A súlymodell egyenlete a következő:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{y} + \boldsymbol{\delta}, \tag{17.6}$$

ahol $\boldsymbol{\Omega}$: a súlyegyütthatókat tartalmazó mátrix, $\boldsymbol{\delta}$: a latens változók reziduális tagjait tartalmazza.

A modellben feltételezzük, hogy

$$E(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}, \quad E(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad E(\boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}, \quad E(\mathbf{y}\boldsymbol{\delta}') = \mathbf{0}.$$

A j-edik latens változó feltételes várható értéke:

$$E(\eta_j \mid \mathbf{y}) = \sum_k (\omega_{jk} y_k). \tag{17.7}$$

17.1. A strukturális egyenlet redukált formája

A strukturális egyenlet a latens változók kapcsolódásait írja le:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta}. \tag{17.8}$$

A **B** mátrix latens változók egymásra gyakorolt közvetlen hatásait, a közvetlen kapcsolódások útegyütthatóit tartalmazza. Ha ezt az egyenletet átrendezzük úgy, hogy a bal oldalra kerüljenek a latens változók, akkor a strukturális egyenlet redukált formájához jutunk:

$$\boldsymbol{\eta} = (I - \mathbf{B})^{-1}\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{B}^*\boldsymbol{\zeta}. \tag{17.9}$$

A redukált forma $\mathbf{B}^*$ mátrix a latens változók egymásra gyakorolt teljes hatásait tartalmazza. A teljes és a közvetlen hatások különbsége a közvetett hatást mutatja, azt a hatást, amelyet a direkt utak mellett az indirekt utakon az egyes latens változók más változókra kifejtenek:

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}^* - \mathbf{B}. \tag{17.10}$$

Ehhez hasonlóan kifejezhetjük a latens változónak a megfigyelt változókra vonatkozó teljes és közvetett hatásait is:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}^*\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\Lambda}^*\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{17.11}$$

ahol $\boldsymbol{\Lambda}$: a közvetlen hatásokat, $\boldsymbol{\Lambda}^*$: a teljes hatásokat tartalmazza.

Így

$$\boldsymbol{\Lambda}^+ = \boldsymbol{\Lambda}^* - \boldsymbol{\Lambda} \tag{17.12}$$

a latens változók manifeszt változókra vonatkozó közvetett hatásait tartalmazza, amelyek egyenlők nullával az exogén változók esetén.

17.2. A modellben szereplő változók és paraméterek

$\mathbf{y}' = [y_1, y_2, \ldots, y_p]$: a megfigyelt, manifeszt változók p-elemű vektora,

$\eta' = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m]$: a latens változók m-elemű vektora,

$\zeta' = [\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m]$: a latens változók reziduális komponense (sztochasztikus reziduális tag),

$\epsilon' = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p]$: a manifeszt változók reziduális komponense (mérési hiba),

$\delta' = [\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m]$: a latens változók reziduális komponense (a súlyegyenletek reziduális tagja),

$\mathbf{B}$: a latens változók útegyütthatóinak mátrixa, $(m \times m)$ típusú, általános eleme β_{ij} a j-edik latens változónak az i-edik latens változóra kifejtett közvetlen hatását mutatja,

Λ: a megfigyelt (manifeszt) változók faktorsúlymátrixa, $(m \times p)$ típusú, általános eleme λ_{kj} a j-edik latens változó közvetlen hatását fejezi ki a k-adik megfigyelt változóra,

Ω: a latens változók súlyegyütthatói (regressziós együtthatók), $(m \times p)$ típusú, általános eleme ω_{jk} a k-adik megfigyelt változó közvetlen hatását fejezi ki a j-edik latens változóra,

Ψ: a latens változók sztochasztikus reziduális tagjai között számított variancia-kovarianciamátrix, $(m \times m)$ típusú, általános eleme ψ_{ij} az i-edik és j-edik reziduális komponens kovarianciája $(E(\zeta_i \zeta_j)$, és ψ_{ii} jelöli az i-edik reziduális komponens varianciáját $(E(\zeta_i \zeta_i))$,

Θ: a megfigyelt változók mérési hibáinak variancia-kovarianciamátrixa, $(p \times p)$ típusú, általános eleme $\theta_{k\ell}$ a k-adik és ℓ-edik megfigyelt változó mérési hibája között számított kovarianciát, a θ_{kk} a k-adik mérési hiba (reziduális tag) varianciáját jelöli.

17.3. A modellben szereplő változók variancia-kovarianciamátrixai

Mivel a megfigyelt változókat a mérési modellben a latens változók függvényeiként fejeztük ki, nézzük először a latens változók kovarianciamátrixát:

$$\mathbf{C} = E(\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}') = \mathrm{cov}(\boldsymbol{\eta}) = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{I} - \mathbf{B}')^{-1} = \mathbf{B}^*\boldsymbol{\Phi}\mathbf{B}^{*'}, \qquad (17.13)$$

ahol Φ: a sztochasztikus reziduális tag variancia-kovarianciamátrixa.

A paraméter becslésénél feltételezzük, hogy a latens változók standardizáltak, így a kovariancia egyenlő lesz a korrelációval. A fentieket felhasználva a megfigyelt változók variancia-kovarianciamátrixa:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{cov}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}' + \boldsymbol{\Theta}_\varepsilon. \qquad (17.14)$$

A megfigyelt változók variancia-kovarianciamátrixa a Λ, $\mathbf{C}$ és Θ_ε paraméterek függvénye.

Számíthatjuk még a megfigyelt változók és a latens változók közötti páronkénti kovarianciákat (standardizált változók esetén korrelációkat), a latens változók struktúráját:

$$\mathbf{T} = \mathrm{cov}(\mathbf{y}\boldsymbol{\eta}') = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C} = \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{I} - \mathbf{B}')^{-1}. \tag{17.15}$$

A sztochasztikus reziduális tag (ζ) variancia-kovarianciamátrixa:

A mérési hiba variancia-kovarianciamátrixa:

$$\boldsymbol{\Theta}_\varepsilon = \mathbf{S} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}' - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{T}' - \mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}'. \tag{17.17}$$

A mérési hiba és a megfigyelt változók variancia-kovarianciamátrixa:

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{y}) = \mathbf{T} - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}. \tag{17.18}$$

A mérési hiba és a sztochasztikus reziduális tag variancia-kovarianciamátrixa:

$$\mathrm{cov}(\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\zeta}) = (\mathbf{T} - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C})(\mathbf{I} - \mathbf{B}'). \tag{17.19}$$

A latens változó ($\widehat{\eta}$) magyarázott részének ($\mathbf{B}\widehat{\eta}$) kovarianciái:

$$\mathbf{C}^* = \mathrm{cov}(\mathbf{B}\widehat{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{B}'. \tag{17.20}$$

A $\mathbf{C}^*$ mátrix diagonálisában az endogén latens változók többszörös korrelációi négyzetét tartalmazza, ami a latens változók varianciáinak az a része, amit a becslő latens változók magyarázni tudnak.

A $\mathbf{C}^*$ diagonális elemei:

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{I} \times (\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{B}'), \tag{17.21}$$

ahol $\times$ az ún. Hadamard-szorzatot jelöli.[1]

A megfigyelt változók mérési modellje a megfigyelt változókat két részre bontja: a közös faktorok hatására ($\Lambda\eta$) és a mérési hibára (ϵ). A közös, a latens változók (faktorok) által magyarázott rész kovarianciái:

$$\mathbf{H}^2 = \mathrm{cov}(\boldsymbol{\Lambda}\widehat{\boldsymbol{\eta}}) = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}'. \tag{17.22}$$

A $\mathbf{H}$ diagonális elemei a megfigyelt változók varianciáival standardizálva:

$$\mathbf{H}^2 = (\mathbf{I} \times (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}\,\boldsymbol{\Lambda}'))(\mathbf{I} \times \mathbf{S})^{-1} \tag{17.23}$$

a megfigyelt változók kommunalitásait adják. A h_k^2 a k-adik megfigyelt változó (y_k) varianciájának az a része, amelyet a megfigyelt változóhoz közvetlenül kapcsolódó latens változók reprodukálnak.

Kapcsoljuk össze a mérési modellt és a strukturális egyenletet:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\epsilon}. \tag{17.24}$$

Azt látjuk, hogy a manifeszt változók $\mathbf{y}$ közös része két részre bontható: az egyedi részre $\Lambda\zeta$ és a redundáns részre $\Lambda\beta\eta$.

Az egyedi rész a megfigyelt változónak az a része, amit a vele közvetlenül összekötött latens változók önmagukban reprodukálnak. Az y_k redundáns részét akár a vele közvetlenül összekötött latens változók, akár ezek prediktorai reprodukálhatják.

A megfigyelt változók redundáns részeinek kovarianciamátrixa:

$$\mathbf{F} = \mathrm{cov}(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{B}'\boldsymbol{\Lambda}'. \tag{17.25}$$

[1] A Hadamard-szorzatot a következőképpen definiáljuk: $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ ha $a_{jk} = b_{jk}c_{jk}$ bármely j, k-ra.

Az $\mathbf{F}$ mátrix diagonális elemeit standardizáljuk a megfigyelt változók varianciáival:

$$\mathbf{F}^2 = (\mathbf{I} \times (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{B}'\boldsymbol{\Lambda}'))(\mathbf{I} \times \mathbf{S})^{-1}. \tag{17.26}$$

Az $\mathbf{F}^2$ mátrix diagonális elemei a megfigyelt változók redundanciaegyütthatói. A redundancia-együttható a megfigyelt változó varianciájának az a része, amit a megfigyelt változóval közvetetten kapcsolódó latens változók magyaráznak. Az exogén megfigyelt változók redundanciája nulla.

A (17.24) egyenletbe behelyettesítjük a latens változók becsléseit ($\widehat{\eta} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{y}$):

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{y} + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{17.27}$$

ahol a megfigyelt változók redundáns része:

$$\widehat{\mathbf{y}} = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{y}. \tag{17.28}$$

A redundáns rész kovarianciamátrixa:

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(\widehat{y}) &= \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}\boldsymbol{\Omega}'\mathbf{B}'\boldsymbol{\Lambda}' \\ &= \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{B}'\boldsymbol{\Lambda}' \\ &= \operatorname{cov}(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{B}\boldsymbol{\eta}) = \text{ a (17.25) egyenlet szerint.} \end{aligned}$$

17.4. A paraméterek becslése a parciális legkisebb négyzetek módszerével

A legkisebb négyzetek módszere a statisztikában jól ismert eljárás. A parciális jelzővel ellátott becslési módszer a klasszikus kritérium kiterjesztését jelöli. A parciális legkisebb négyzetek módszer lényege, hogy a paramétereket részhalmazokra bontja, particionálja, az egyes partíciókat a legkisebb négyzetek módszere kritériuma szerint becsüli, miközben a többi paraméter kötött értékkel szerepel. Az eljárás iteratív, az iterációs ciklus mindegyikében a paraméterek egy-egy részhalmazát becsüli a többi paraméter értékét ismertnek feltételezve.

A parciális legkisebb négyzetek módszerénél a következő előfeltételezéseket teszszük:

1) A manifeszt változók egymást át nem fedő (diszjunkt) blokkokra vannak particionálva.

2) A latens változók is egymást át nem fedő blokkokra vannak particionálva, és egy latens változó-blokk csak egy manifeszt változó-blokkhoz kapcsolódhat, vagyis a manifeszt és latens változók kapcsolódásait egy blokk-diagonális mátrix írja le.

3) Az út-modell (a strukturális egyenletrendszer) rekurzív.

A becslés technikai feltételei:

1) A latens változókat a manifeszt változók lineáris kombinációjával becsüljük:

$$\widehat{\boldsymbol{\eta}}_j = \sum_k (w_{jk} y_k), \tag{17.29}$$

ahol w_{jk} a ω_{jk} becslése.

2) A latens változók strukturális egyenleteit (útegyenleteket) a reziduális tag varianciájának minimalizálásával becsüljük:

$$\operatorname{var}(\zeta_k) = \Psi_k^2 \longrightarrow \min . \qquad (17.30)$$

3) A modell strukturális egyenleteken kívüli részét blokkonként vagy

a) a súlymodell szerint $E(\eta_j \mid \mathbf{y}) = \sum_k(\omega_{jk} y_k)$, a súlyegyütthatókat a reziduális tag varianciájának minimalizálásával becsüljük:

$$\operatorname{var}(\delta_j) \longrightarrow \min, \qquad (17.31)$$

vagy

b) a mérési modell szerint $E(y_k \mid \boldsymbol{\eta}) = \sum_j(\lambda_{kj}\eta_j)$, a faktorsúly-együtthatókat a reziduális tag varianciájának minimalizálásával becsüljük:

$$\operatorname{var}(\varepsilon_k) \longrightarrow \min . \qquad (17.32)$$

A parciális legkisebb négyzetek módszer algoritmusa iteratív eljárással ad becslést a paraméterekre. Minden iterációs ciklus három lépésből áll.

Az iterációs eljárás lépései:

1. lépés: becsüljük a latens változókat vagy a súlymodell (17.18) kritériuma, vagy a mérési modell (17.19) kritériuma szerint: $\widehat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{W}\mathbf{y}$.

Kiszámítjuk a latens változók kovarianciamátrixának becslését:

$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{W}\mathbf{S}\mathbf{W}', \qquad (17.33)$$

ahol **S** a manifeszt változók variancia-kovarianciamátrixa, valamint a latens változók és a megfigyelt változók páronkénti kovarianciáit tartalmazó struktúramátrix becslése:

$$\widehat{\mathbf{T}} = \mathbf{S}\mathbf{W}'. \qquad (17.34)$$

Az eljárás legelső lépésében a súlymátrix (**W**) elemeit pszeudo-véletlen számokkal feleltetjük meg.

2. lépés: amennyiben a latens változók egymás közti kapcsolódásaira feltételekkel élünk (közöttük korrelálatlanságot írunk elő), a második lépésben a latens változókat transzformáljuk a „patterned orthonormalizing rotation" eljárás szerint.

3. lépés: becsüljük a latens változók belső súlyegyütthatóit:

$$\boldsymbol{\eta}^* = \mathbf{V}\widehat{\boldsymbol{\eta}}.$$

A belső súlyegyütthatókat a következő módokon adhatjuk meg:

a) *útegyütthatóként*, amikor a belső strukturális modell út-modell. Ebben az esetben az exogén latens változó optimális becslő, az endogén latens változó optimális becsült, és a predeterminált latens változó optimális közvetítő változó.

$$v_{hh'} = \begin{cases} b_{hh'}, & \text{ha } \eta_{h'} \text{ megelőzi } \eta_h\text{-t} \\ r_{hh'}, & \text{ha } \eta_{h'} \text{ követi } \eta_h\text{-t} \\ 0, & \text{ha } \eta_{h'} \text{ és } \eta_h \text{ nincs közvetlenül összekötve.} \end{cases} \qquad (17.35)$$

b) *centroid együtthatóként*, amikor azt figyeljük, hogy a latens változókhoz mely latens változók kapcsolódnak közvetlenül. A latens változót az útdiagramban szomszédos latens változók súlyozatlan összegével becsüljük. Hogy az egymással negatívan korreláló szomszédos latens változók ne semlegesítsék egymás hatását, az előjelfüggvényt alkalmazzuk:

$$v_{hh'} = \begin{cases} \operatorname{sign}(r_{hh'}), & \text{ha } \eta_h \text{ és } \eta_{h'} \text{ közvetlenül össze van kötve} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad (17.36)$$

Ezzel a feltétellel a latens változók úgy korrelálnak egymással, hogy a centroid faktornak (amit másodrendű faktornak tekinthetünk) maximális legyen a varianciája. (A centroid faktor faktorsúlyai 1, 0, –1 értéket vehetnek fel.)

c) Faktorsúlyként, amikor az a célunk, hogy a latens változók főkomponenseinek varianciái maximálisak legyenek. Ekkor az együtthatók:

$$v_{hh'} = \begin{cases} r_{hh'}, & \text{ha } \eta_h \text{ és } \eta_{h'} \text{ közvetlenül össze van kötve} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{17.37}$$

4. lépés: Becsüljük a belső súlyegyütthatókkal a latens változókat:

$$\boldsymbol{\eta}^* = \mathbf{V}\widehat{\boldsymbol{\eta}}.$$

5. lépés: Ortogonálisan transzformáljuk a becsült latens változókat ($\boldsymbol{\eta}^*$), ha a latens változók páronkénti kapcsolódásaira feltételezésekkel élünk.

6. lépés: Becsüljük a külső súlyokat ($\mathbf{W}$) a reziduális tag minimalizálásával:

$$\widehat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{W}\mathbf{y}.$$

Az iteráció a 6 lépés ismétléséből áll, és akkor áll le, ha a két egymás utáni sorozatban a súlyegyütthatókra a következő teljesül:

$$|w^{(s)} - w^{(s+1)}| < 10^{-5},$$

vagy

$$|(w^{(s)} - w^{(s+1)})/w^{(s)}| < 10^{-5}.$$

17.5. A becslés illeszkedésének mérése

A becslés illeszkedésére nincs egyetlen indexünk, de a becslés jóságát megítélhetjük a következő mennyiségekkel, és így dönthetünk az érvényességéről:

$$h^2 = \mathrm{trace}(\mathbf{H}^2)/p \quad \text{kommunalitás,} \tag{17.38}$$

$$f^2 = \mathrm{trace}(\mathbf{F}^2)/p \quad \text{redundancia,} \tag{17.39}$$

$$c^2 = \mathrm{trace}(\mathbf{C}^2)/m, \tag{17.40}$$

$$s^2 = \mathrm{trace}(\mathbf{S})/p, \tag{17.41}$$

$$r^2 = \mathrm{trace}(\mathbf{C})/m, \tag{17.42}$$

$$\Theta^2 = \mathrm{trace}(\boldsymbol{\Theta})/m, \tag{17.43}$$

$$\Psi^2 = \mathrm{trace}(\boldsymbol{\Phi})/m, \tag{17.44}$$

$$s = \mathrm{rms}\mathbf{S}, \tag{17.45}$$

$$c = \mathrm{rms}\mathbf{C}, \tag{17.46}$$

$$\Theta = \mathrm{rms}\boldsymbol{\Theta}, \tag{17.47}$$

$$\Psi = \mathrm{rms}\boldsymbol{\Phi}, \tag{17.48}$$

$$\mathrm{ceh} = \mathrm{rms\ cov}(\mathbf{e}\boldsymbol{\eta}), \tag{17.49}$$

$$\mathrm{ceh} = \mathrm{rms\ cov}(\mathbf{e}\boldsymbol{\zeta}), \tag{17.50}$$

$$\bar{c} = \bar{\sum_h} \bar{\sum_{h<h'}} |c_{hh'}|, \tag{17.51}$$

$$t = \text{rms}\mathbf{T}. \tag{17.52}$$

A fenti mennyiségekből[2] h^2, f^2 és c^2 arányszámok a variancia arányait jelölik. Ha a megfigyelt változók standardizáltak, akkor $\Theta^2 = s^2 - h^2 = 1 - h^2$ is arányszám. A paraméterek maximum likelihood becslésének veszteségfüggvényét

$$L = \log|\boldsymbol{\Sigma}| + \text{tr}(\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) - \log|\mathbf{S}| - p \tag{17.53}$$

használhatjuk a modell tesztelésére. Ha a megfigyelt változók együttes eloszlása normális, az $(n-1)L$ eloszlása közelítőleg χ^2 eloszlású (n a megfigyelések száma)

$$f_t = (p^2 + p)/2 - t \tag{17.54}$$

szabadságfokkal, ahol t a modell független paramétereinek a számát jelöli.

Tekintsük a legegyszerűbb modellt:

$$H_d : \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{S} \times \mathbf{I}, \tag{17.55}$$

ahol a megfigyelt változókról feltételezzük, hogy páronként korrelálatlanok. A veszteségfüggvény egyszerűsödik, mivel $\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ mátrix egységmátrix, aminek a nyoma (trace) egyenlő p-vel, így

$$L_d = \log|\mathbf{I} \times \mathbf{S}| - \log|\mathbf{S}|. \tag{17.56}$$

Ha a változók standardizáltak is, akkor $(\mathbf{I} \times \mathbf{S}) = \mathbf{I}$, és így $\log|\mathbf{I} \times \mathbf{S}| = 0$, és $L_d = -\log|\mathbf{S}|$. A szabadságfok $f_d = (pp - p)/2$. Tekintsük továbbá a korlátozott faktoranalitikus modellt:

$$H_r : \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{C}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{I} \times \boldsymbol{\Theta}) \tag{17.57}$$

az L_r veszteségfüggvénnyel, ahol a latens változók korrelációi és a faktorsúlyok közül rögzíthetünk értékeket (feltételezhetjük, hogy egyenlőek nullával), és feltételezzük, hogy a reziduális kovarianciamátrix diagonális.

A H_r és H_s hipotézissel megfogalmazott modellek illeszkedésének különbözőségére Tucker és Lewis (1973) a következő megbízhatósági indexet definiálta:

$$r_{TL} = \frac{L_s/f_s - L_r/f_r}{L_d/f_d - 1/N}. \tag{17.58}$$

Vagy a Bentler és Bonnet (1980)-féle megbízhatósági index:

$$r_{BB} = \frac{L_s - L_r}{L_d}. \tag{17.59}$$

Mindkét megbízhatósági indexnél a modellek különbségeit a legegyszerűbb (a legkorlátozottabb) modellhez viszonyítottuk.

A latens útmodell mérési és súlymodell részét (a modell külső részét, egyenleteit) a mérési adatokhoz kielégítően illeszkedőnek akkor tekintjük,

[2] Megjegyzés: az rms$\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}$ mátrix diagonális nélküli elemeinek négyzetes átlagát jelöli (root mean squared (rms)), ahol a szumma jel feletti vonás az átlag operátor jele.

$$\text{rms}\,\mathbf{A} = \left[\bar{\sum}_i \bar{\sum}_{\neq j} a_{ij}^2\right]$$

– ha a manifeszt változók varianciáinak nem megmagyarázott része $(1 - h^2)$ elég kicsi,

– ha a manifeszt változók kovarianciáinak nem megmagyarázott része (Θ/s) elég kicsi,

– ha a h_k^2 (az y_k változók kommunalitása) elég nagy, és a Θ_k^2 reziduális kovarianciák elég kicsik a mérési modellben,

– ha a blokkok közötti reziduális kovarianciák $(\Theta_{kk'})$ a nullához közelítenek,

– ha a mérési hiba (a reziduális tag) és a latens változók közötti kovarianciák $\mathrm{cov}(\mathbf{e}\eta)$ közelítőleg nullával egyenlőek,

– ha egy blokkban csak egy manifeszt változó van, akkor a reziduális tag varianciája egyenlő nullával,

– ha egy blokkban csak két manifeszt változó van, akkor a reziduális változók tökéletesen korreláltak lesznek,

– ha egy blokkban csak kevés latens változó szerepel, a reziduális változók negatívan korrelálnak.

A modell sturkturális (belső) részének illeszkedése kielégítő,

– ha a latens változók nem megmagyarázott része $(1 - r^2)$ elég kicsi,

– ha a latens változók kovarianciáinak nem megmagyarázott része (Ψ/c) elég kicsi.

A teljes modell illeszkedését kielégítőnek tekintjük,

– ha a redundancia-együttható (f^2) elég nagy,

– ha a belső és külső reziduális tagok közötti kovarianciák $(\mathrm{cov}(\mathbf{e}\zeta))$ elég kicsik.

17.6. Kategorikus változók

Ismeretes, hogy a dichotom változó két kategóriájához bármely értéket (természetesen két különbözőt) hozzárendelhetünk. Ha a dichotom változó két lehetséges értékéhez a 0 és az 1 értékeket rendeljük, akkor a változót Boole-változónak nevezzük. A Boole-változót formálisan a következőképpen definiáljuk:

$$P(x = 1) = 1 - P(x = 0) = \mu. \tag{17.60}$$

Ebből a definícióból következik, hogy

$$E(x) = \Sigma P(x = i)i = \mu 1 + (1 - \mu)0 = \mu, \tag{17.61}$$

$$E(x^2) = \Sigma P(x = i)i^2 = \mu 1^2 + (1 - \mu)0^2 = \mu, \tag{17.62}$$

és általában

$$E(x^r) = \Sigma P(x = i)i^r = \mu 1^r + (1 - \mu)0^r = \mu, \tag{17.63}$$

$$\text{ha} \quad r > 0.$$

Az x változó varianciája:

$$\sigma^2 = \mu(1 - \mu) = \mu - \mu^2. \tag{17.64}$$

Egy kategorikus változó kategóriái legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságú halmazt alkotnak. A k-adik kategória bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(x = k) = \mu_k. \tag{17.65}$$

A kategorikus változót helyettesítjük Boole-változók egy halmazával a következő előírás szerint:

$$x = k \Longleftrightarrow x_k = 1. \tag{17.66}$$

A fentiekből következik, hogy

$$E(x_k) = E(x_k^2) = E(x_k^\nu) = P(x = k) = \mu. \tag{17.67}$$

vagyis a várható értéket mint valószínűséget értelmezhetjük. Boole-változók bármely párjának, hármasának stb várható értéke:

$$E(x_k x_{k'} x_{k''} \dots) = \begin{cases} \mu, & \text{ha } k = k' = k'' = \dots \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \tag{17.68}$$

Ha az $\mathbf{x}$ vektor tartalmazza a Boole-változókat, akkor a (17.67) a következőképpen írható fel:

$$E(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}. \tag{17.69}$$

Tekintsünk most két Boole vektor változót, $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$-t az x és az y kategorikus változók helyettesítéseiként. Az $\mathbf{x}$ és és $\mathbf{y}$ valószínűségeloszlása:

$$P(x_k = 1,\ \ y_\ell = 1) = \mu_{k\ell}, \tag{17.70}$$

ahol $k = 1, 2, \dots q$, $\ell = 1, 2, \dots, p$.

A várható értékek:

$$E(x_k y_\ell) = \mu_{k\ell} \quad \text{és} \quad E(\mathbf{x}\mathbf{y}') = \boldsymbol{\mu}_{xy}. \tag{17.71}$$

A μ_{xy} egy $(q \times p)$ típusú mátrix, a kétváltozós valószínűségek táblázata vagy más néven kontingenciatáblázat. Helyezzük az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorokat az $\mathbf{u}$ vektorba:

$$\mathbf{u}' = [\mathbf{x}', \mathbf{y}'] = [\dots x_k \dots, \dots y_\ell \dots].$$

Az $\mathbf{u}$ vektor várható értéke:

$$E(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\mu}_u = [\mathbf{u}_x', \boldsymbol{\mu}_y'] = [\dots \mu_k \dots, \dots \mu_\ell \dots].$$

Ezek után definiáljuk a szuper-kontingenciatáblázatot:

$$E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = E\begin{pmatrix} \mathbf{x}\mathbf{x}' & \mathbf{x}\mathbf{y}' \\ \mathbf{y}\mathbf{x}' & \mathbf{y}\mathbf{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} \end{pmatrix}. \tag{17.72}$$

A szuper-kontingenciatáblázat tartalmazza a kontingenciatáblázatot, a μ_{xy}-t, ennek transzponáltját, μ_{yx}-t, és a μ_{xx} és μ_{yy} diagonális mátrixokat. A μ_{xx} diagonális mátrix diagonális elemei az egyváltozós valószínűségek ($\mu_{kk} = \mu_k$ a (17.68) szerint). Általában q kategorikus változó Boole-változóinak szuper-kontingenciamátrixa q^2 szubmátrixot (blokkot) tartalmaz.

Az x és y kategorikus változók megfigyeléseit x_i és y_i jelölje. A helyettesítő Boole-változók megfigyelt értékeit ekkor x_{ki} és $y_{\ell i}$ jelöli. A Boole-változók összege:

$$n_k = \sum_i x_{ki}, \quad n_\ell = \sum_i y_{\ell i}, \tag{17.73}$$

és átlaga:

$$m_k = \overline{\Sigma}_i x_{ki}, \quad m_\ell = \overline{\Sigma}_i y_{\ell i}, \tag{17.74}$$

ahol $\overline{\Sigma}$: az átlag műveletet jelöli.

A relatív szorzat momentummátrixa:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \mathbf{x}\mathbf{x}' & \mathbf{x}\mathbf{y}' \\ \mathbf{y}\mathbf{x}' & \mathbf{y}\mathbf{y}' \end{pmatrix}. \tag{17.75}$$

Definiáljuk még a normált szorzatmátrixot:

$$\mathbf{Q} = \left[q_{k\ell} = \frac{m_{k\ell}}{\sqrt{m_k m_\ell}} \right], \tag{17.76}$$

a kovarianciamátrixot:

$$\mathbf{C} = [c_{k\ell} = m_{k\ell} - m_k m_\ell], \tag{17.77}$$

a normált eltérésmátrixot:

$$\mathbf{D} = \left[d_{k\ell} = \frac{m_{k\ell} - m_k m_\ell}{\sqrt{m_k m_\ell}} \right], \tag{17.78}$$

és a korrelációmátrixot:

$$\mathbf{R} = \left[r_{k\ell} = \frac{m_{k\ell} - m_k m_\ell}{\sqrt{(m_k - m_k^2)(m_\ell - m_\ell^2)}} \right]. \tag{17.79}$$

A normált eltérés mátrix felhasználásával számíthatjuk a Yule-féle (phi) együttható négyzetét:

$$\Phi^2 = \frac{1}{n}\chi^2 = \sum_k \sum_\ell d_{k\ell}^2, \tag{17.80}$$

és a kontingenciaegyütthatókat:

$$C_{\text{Cramer}} = \sqrt{\Phi^2/(\min(pq) - 1)} \tag{17.81}$$

$$C_{\text{Pearson}} = \sqrt{\Phi^2/(1 + \Phi^2)} = \sqrt{\chi^2/(n + \chi^2)}. \tag{17.82}$$

17.6.1. Kanonikus korreláció

Legyen adva két változóhalmaz, $x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, q)$ és $y_\ell \quad (\ell = 1, 2, \ldots, p)$. Adottak továbbá a szorzatmátrixok $\mathbf{M}_{xx}$ és $\mathbf{M}_{yy}$, valamint a várható értékek vektorai: $\mathbf{m}_k = \mathbf{0}$ és $\mathbf{m}_y = \mathbf{0}$.

A kanonikus korreláció modellje a következő egyenletekből áll:

$$\xi = \sum_k w_k x_k, \quad \mathrm{var}(\xi) = \mathbf{w}'\mathbf{M}_{xx}\mathbf{w} = 1, \tag{17.83}$$

$$\eta = \sum_\ell v_\ell y_\ell, \quad \mathrm{var}(\eta) = \mathbf{v}'\mathbf{M}_{yy}\mathbf{v} = 1, \tag{17.84}$$

$$\eta = \rho\xi + \zeta, \quad E(\eta|\xi) = \rho\xi, \tag{17.85}$$

ahol ξ és η a kanonikus latens változók egységnyi varianciával, $\mathbf{w} = [w_k]$ és $\mathbf{v} = [v_\ell]$ a kanonikus súlyegyütthatók, és ρ az első kanonikus korreláció.

A kanonikus korreláció modell skálafüggetlen, ami azt jelenti, hogy ha például x_k-t megszorozzuk $1/c$ konstanssal és a w_k értékét c-vel, akkor a (17.85) változatlan marad.

A kanonikus korreláció modellben annyi kanonikus változópár állítható elő, amennyi az x_k és y_k változóhalmaz elemeinek a minimuma $(\min(p, q))$.

Bizonyítható (lásd Lancaster, 1969), hogy a kanonikus korrelációs együtthatók négyzetösszege megegyezik a Yule-féle együtthatóval:

$$\Phi^2 = \sum_i^{\min(p,q)} \rho_i^2, \tag{17.86}$$

ami azt is jelenti, hogy a kanonikus korrelációs együtthatók négyzetes átlagának négyzetgyöke egyenlő a Cramer-féle kontingenciaegyütthatóval.

17.6.2. Főkomponens-elemzés

Legyen adva a dichotom változók normált vektora:

$$\mathbf{u}' = [u_k] = [\ldots x_{k(Q)} \ldots, \ldots y_{\ell(Q)} \ldots],$$

ekkor a dichotom változók lehetséges értékei: $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{m_k}}\right)$.

Adottak továbbá a modell egyenletei:

$$u_k = p_k\eta + e_k \quad E(u_k|\eta) = p_k\eta, \tag{17.87}$$

$$\eta = \sum_k w_k u_k \quad \mathrm{var}(\eta) = \mathbf{w}'\mathbf{Q}\mathbf{w}. \tag{17.88}$$

A $\mathbf{Q}$ mátrix sajátértéke

$$d_{(Q)} = \sum_k p_k^2,$$

és az $\mathbf{x}_Q$ és $\mathbf{y}_Q$ közötti kanonikus korreláció között az alábbi összefüggés létezik:

$$d_{(Q)} = 1 + \rho_{(Q)}, \tag{17.89}$$

valamint, hogy a főkomponens (FK) súlyok $w_{k(FK)}$ és a kanonikus súlyok (KK) $w_{k(KK)}$ és $v_{\ell(KK)}$ úgy viszonylanak egymáshoz, hogy a kanonikus változók értékeit közvetlenül a főkomponens súlyokból számíthatjuk:

$$\begin{aligned} \xi_{(KK)} &= f\sum_k w_{k(FK)} x_{x(Q)}, \\ \eta &= g\sum_\ell v_{\ell(FK)} y_{\ell(Q)}, \end{aligned} \tag{17.90}$$

ahol f és g a latens változók standardizálásához szükségesek.

17.6.3A kategóriák skálázása

Egy kategorikus változót – láttuk az előzőekben – helyettesíthetünk Boole-változókkal úgy, hogy minden kategóriához hozzárendelünk egy (0, 1) értéket felvevő változót. A k-adik Boole-változó akkor veszi fel az 1-et $(y_k = 1)$, ha a kérdéses megfigyelés (i) az y változó k-adik kategóriába esik $(y_i = k)$. Ebből következően felhasználva az előző két alfejezet latens változó-képzését:

$$\sum_k w_k y_{ki} = w_k, \tag{17.91}$$

vagyis a latens változó értéke az i-edik megfigyelésnél (ha a k-adik kategóriába tartozik) egyenlő lesz a w_k súlyegyütthatóval, ami pedig a k-adik kategóriához rendelt Boole-változók súlya. Így a latens változó a megfigyelt változó intervallummérési szintű változójának tekinthető.

Több, mint két kategorikus változó esetén a kategóriák skálázásához a szuperkontingenciamátrixot ($\mathbf{M}$) normalizáljuk ($\mathbf{Q}$), meghatározzuk a főkomponens súlyokat

($x_{k(Q)}$) és ezután a kapott súlyokat visszatranszformáljuk:

$$w_{k(M)} = w_{k(Q)}/\sqrt{m_k}. \tag{17.92}$$

A **Q** mátrix első komponense triviális, a főkomponens együtthatói egyenlőek m_k-val, a súlyok pedig 1-gyel. A második (és a további főkomponensek) pedig egyenlőek lesznek a **D** (normált eltérés) mátrix első (és többi) főkomponenseivel, így a gyakorlati megoldásoknál a **D** mátrixot használjuk.

17.7. Háromdimenziós útelemzés

Az eddigi modellek kétdimenziós mátrixok elemzését végezték. A háromdimenziós általánosításukhoz nézzük először az ún. Kronecker-szorzatot, amit mátrixok között értelmezünk.

Az **A** mátrix a **B** és **C** mátrix Kronecker-szorzata:

$$\underset{(JK \times PQ)}{\mathbf{A}} = \underset{(J \times P)}{\mathbf{B}} \otimes \underset{(K \times Q)}{\mathbf{C}} = [a_{(jk)(pq)}] = [b_{jp}c_{kq}]. \tag{17.93}$$

Bevezetünk még két jelölést:

– a vektorfüggvényt, jele: vec **A**,

$$\mathrm{vec}\mathbf{A} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1K}, a_{21}, \ldots, a_{jk}, \ldots, a_{JK})' = a_{(jk)}.$$

A vec**A** függvény az **A** mátrix sorait sorban belehelyezi egy oszlopvektorba. A zárójelben lévő dupla index kombinált indexet jelöl: $(jk) = (j-1)J+k$, ahol a második index (k) gyorsabban fut, mint az első index (j).

– egy paramétermátrix (**A**) modell (pattern) mátrixát, **M** -et vagy más jelöléssel $\mathbf{M_A}$, $M(\mathbf{A})$ vagy pattern (**A**). Az **M** mátrix azt jelöli, hogy a paramétermátrix mely eleme a szabad paraméter, és melyet rögzítettünk 0-hoz:

$$\mathbf{A} = \mathbf{M_A}\mathbf{A}.$$

Ha $m_{jk} = 1$, akkor bármely valós a_{jk}-ra ($m_{jk}a_{jk} = a_{jk}$). Ha $m_{jk} = 0$, akkor az $a_{jk} =$ $= 0$ kötött elem. Ha a modell mátrix egységmátrix, akkor a paramétermátrix diagonális:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}\mathbf{A}.$$

Az indexek az eddigiektől eltérnek, így összefoglaljuk őket:

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, I, \\ j &= 1, 2, \ldots, J, \\ k &= 1, 2, \ldots, K, \\ r &= 1, 2, \ldots, R, \\ q &= 1, 2, \ldots, Q. \end{aligned}$$

A Kronecker-főkomponensek

Ha egy **A** mátrixnak Kronecker-struktúrája van és elég nagy mátrix, akkor jól jellemezhetjük a viszonylag kicsi **B** és **C** paramétermátrixokkal. A modellben

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A}_r, \tag{17.94}$$

ahol $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixokat az $\mathbf{A}$ mátrix Kronecker-főkomponenseinek nevezzük. A modell becslését a legkisebb négyzetek módszerének kritériuma szerint a következő függvény minimalizálásával kapjuk meg:

$$\Phi = \mathrm{trace}(\mathbf{A}_r'\mathbf{A}_r) \Longrightarrow \min\,. \tag{17.95}$$

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus (multitrait-multimethod) korrelációmátrix, akkor a reziduális $\mathbf{A}_r$ mátrix diagonális elemeit elhagyhatjuk a minimalizáláskor. Ekkor a reziduálismátrix:

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{A}_r(\mathbf{1} - \mathbf{I}), \tag{17.96}$$

és a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixokat Kronecker–Minres faktornak nevezzük, amelyek a

$$\Phi = \mathrm{trace}(\mathbf{A}_s'\mathbf{A}_s) \longrightarrow \min \tag{17.97}$$

függvényt minimalizálják.

A Kronecker-főkomponensek illeszkedésének jóságát a következő index mutatja:

$$fitkpc(\mathbf{A}) = 1 - \mathrm{trace}(\mathbf{A}_r'\mathbf{A}_r)/\mathrm{trace}(\mathbf{A}'\mathbf{A}). \tag{17.98}$$

Háromdimenziós modellek

A következő táblázatban Lohmöller és Wold nyomán összefoglalunk különböző kétdimenziós modelleket és a háromdimenziós megfelelőiket.

Modell	Kétdimenziós	Háromdimenziós
Komponens-elemzés	$\underset{(J\times I)}{\mathbf{Y}} = \underset{(J\times P)}{\mathbf{A}}\,\underset{(P\times P)}{\mathbf{D}}\,\underset{(P\times I)}{\mathbf{X}} + \underset{(J\times I)}{\mathbf{E}}$	$\underset{(JK\times I)}{\mathbf{J}} =$ $= \underset{(JK\times PQ)}{(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2)}\,\underset{(PQ\times M)}{\mathbf{D}}\,\underset{(M\times I)}{\mathbf{X}} + \underset{(JK\times I)}{\mathbf{E}}$ Háromdimenziós komponens-modell Tucker, 1966
Faktorelemzés	$\underset{(J\times 1)}{\mathbf{y}} = \underset{(J\times P)}{\mathbf{A}}\,\underset{(P\times 1)}{\eta} + \underset{(J\times 1)}{\epsilon}$	$\underset{(K\times I)}{\mathbf{y}} =$ $= \underset{(JK\times PQ)}{(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2)}\,\underset{(PQ\times 1)}{\eta} + \underset{(JK\times 1)}{\epsilon}$ Háromdimenziós faktormodell, Bloxom (1968), Bentler and Lee (1978)
Útmodell manifeszt változókkal (MVPM)	$\underset{(J\times 1)}{\mathbf{y}} = \underset{(J\times J)}{\mathbf{B}}\,\underset{(J\times 1)}{\mathbf{y}} + \underset{(J\times 1)}{\epsilon}$	$\underset{(JK\times 1)}{\mathbf{y}} = \underset{(JK\times JK)}{(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}_2)}\,\underset{(JK\times 1)}{\mathbf{y}} + \underset{(JK\times 1)}{\epsilon}$ Háromdimenziós útmodell (MVP3M) Lohmöller (1983)
Útmodell latens válto-zókkal (LVPM)	$\underset{(J\times 1)}{\mathbf{y}} = \underset{(J\times P)}{\mathbf{A}}\,\underset{(P\times 1)}{\eta} + \underset{(J\times 1)}{\epsilon}$ $\underset{(P\times 1)}{\eta} = \underset{(P\times P)}{\mathbf{B}}\,\underset{(P\times P)}{\mathbf{B}}\,\underset{(P\times 1)}{\eta} + \underset{(P\times 1)}{\delta}$	$\underset{(JK\times 1)}{\mathbf{y}} = \underset{(JK\times PQ)}{(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2)}\,\underset{(PQ\times 1)}{\eta} + \underset{(JK\times 1)}{\epsilon}$ $\underset{(PQ\times 1)}{\eta} = \underset{(PQ\times PQ)}{(\mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2)}\,\underset{(PQ\times 1)}{\eta} + \underset{(PQ\times 1)}{\delta}$ LVP3M, Lohmöller (1983)
Komponens-elemzés kevert mérési skálával	$\underset{(K\times I)}{\mathbf{Z}} = \mathrm{scaled}\,\underset{(J\times I)}{(\mathbf{Y})}\,\underset{(J\times I)}{(\mathbf{F})}$ $\underset{(J\times I)}{\mathbf{Y}} = \underset{(J\times P)}{\mathbf{A}}\,\underset{(P\times P)}{\mathbf{D}}\,\underset{(P\times I)}{\mathbf{X}} + \underset{(J\times I)}{\mathbf{E}}$ PRINCIPALS (Young, Takane and de Leeuw 1978)	$\underset{(JK\times I)}{\mathbf{Z}} = \mathrm{scaled}\,\underset{(JK\times I)}{(\mathbf{Y})}\,\underset{(JK\times I)}{\mathbf{F}}$ $\underset{(JK\times I)}{\mathbf{Y}} = \underset{(JK\times RR)}{(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2)}\,\underset{(R\times R)}{\mathbf{D}}\,\underset{(P\times I)}{\mathbf{X}} + \underset{(JK\times I)}{\mathbf{E}}$ ALSCOM3 (Sands and Young 1980)

A táblázatban szereplő jelölések:

A: faktorsúlymátrix, $(J \times P)$ jelöli a mátrix méretét, vagyis az **A** mátrixnak J sora és P oszlopa van, $(J \times P)$ típusú mátrix,

B: az útegyütthatók-mátrixa,

E, **F**, ϵ, δ: a reziduálisokat tartalmazzák,

Z, **Y**: adatmátrixok,

X: főkomponensek értékei,

y: manifeszt változók vektora,

η: latens változók vektora,

D: sajátértékek mátrixa.

17.8. Példa latens változók útelemzésére

Társadalmi státus – értékrend – magatartás út-modellek

A latens változókat a megfigyelt (manifeszt) változók mérési modelljeiként írjuk le. A manifeszt változók három szintjét különítjük el. Az első szinten az egyén családi hátterét írjuk le: a Család társadalmi státusát a Nagyapa, Apa és Anya iskolai végzettségével mérve, a Gyermekkort a különböző településkategóriákban az első 14 életévben eltöltött idővel, Gyermekkori boldogsággal, Jóléttel és Zaklatottsággal kifejezve. A második szint a jelen jellemzését adja: a Társadalmi státus latens változót a Nem, Lakóhely, Életkor, Iskolai végzettség, Jövedelem megfigyelt változók fejezik ki, a Vallásosságot pedig a „Vallásos szellemben nevelték-e Önt a szülei?" és a „Vallásos embernek tartja-e magát?" kérdésekkel mértük. A Család társadalmi státusa, a Gyerekkor, a Társadalmi státus és a Vallásosság latens változók és az őket meghatározó megfigyelt változók kapcsolatát a modellben belsőnek (inwards) tekintjük. Ez alatt azt értjük, hogy a manifeszt változók, mint az ismeretlen dimenzióról összegyűjtött megfigyelt változók, a hatásukat kifejező súlyegyütthatókkal előállítják a latens változót anélkül, hogy azt gondolnánk, hogy a latens változó a felelős a megfigyelt változók varianciáiért. A modellben ezt úgy jelöljük, hogy a megfigyelt változókból húzzuk a nyilat a latens változó felé. A manifeszt változók harmadik szintje az endogén változók halmaza. Egy vagy két blokkot különítünk el. Az egyik – a modellekben állandó – az értékrendszert kifejező blokk. Megfigyelt változói valójában már önmagukban is képzett változók, a MINISSA tér három dimenziója (az első kettő 45 fokkal elforgatva). A modellek abban különböznek, hogy az értékrendszer mellé milyen output változókat jelölünk második blokként. Jellegében ezek az emberek magatartásait, vélekedéseit és értékeléseit fejezik ki. A két endogén blokkban a latens és megfigyelt változók kapcsolata külső (outwards) jellegű, feltételünk szerint a latens változó, mint egy közös faktor, dimenzió felelős a manifeszt változók variancia-kovarianciáiért. Jelölésben a latens változóból a megfigyelt változóba mutató nyillal jelezzük ezt.